مروری بر اختیارات طبیعی (Real Options)

حامد قدوسی، مدرسه تحصیلات تکمیلی فاینانس وین (VGSF)
Ghoddusi©vgsf.ac.at

نسخه ۳ ، تابستان ۸۷

این جزوه نیمه نهایی است و در طول زمان بهبود خواهد یافت. احتمال وجود اشکالات در آن هست و مولف از هرگونه بازخوردی استقبال می کند. هرگونه بهره برداری تجاری از این جزوه بدون اجازه مولف اکیدا ممنوع است. استفاده دانش گاهی بلامانع است.

©Hamed Ghoddusi, 2008

سرفصل مطالب

- بخش اول: درک شهودی از ارزش اختیارات طبیعی
- اختیارات طبیعی در قیاس با اختیارات مالی
- معرفی ابزارهای ریاضی لازم
- روش های عددی برای ارزش گذاری اختیارات طبیعی
- فرم های ریاضی تحلیلی برای ارزش گذاری اختیارات طبیعی
- نمونه هایی از مثال ها و کاربردها

©Hamed Ghoddusi, 2008

بخش اول: درک شهودی از اختیارات طبیعی

خانم های خانه دار ایرانی درک شهودی از مفهوم اختیار طبیعی دارند. به عنوان مثال آن ها با دوراندیشی خاصی معتقدند که چیزهای بی استفاده را نباید دور ریخت چرا که ممکن است روزی به کار آید. این نمونه ای از ارزش اختیار طبیعی نهفته در این چیزها است.

©Hamed Ghoddusi, 2008

نمونه ای از مثال اختیارات طبیعی : ارزش گذاری معدن طلا

• فرض کنید می خواهید قیمت اجازه بهره برداری از یک معدن کوچک طلا را تعیین کنید. اجازه بهره برداری به شکلی است که به صاحب آن این امکان را می دهد تا دو ماه دیگر در مورد سرمایه گذاری روی معدن تصمیم بگیرد. اگر سرمایه گذاری در روز ۶۰ ام انجام شود باید چهل روز برای انجام عملیات صرف شود و بعد در روز صدم (از لحظه فعلی) ۴۵۰۰ اونس طلا استخراج شده و به قیمت روز به فروش خواهد رفت. هزینه سرمایه گذاری دو و نیم میلیون دلار است و نرخ بهره ۵% فرض شده است. بعد از پایان استخراج تجهیزات معدن می تواند به قیمت 750,000 دلار به فروش برسد.

ارزش این اجازه بهره برداری چه قدر است؟

©Hamed Ghoddusi, 2008

وقتی از اختیارات طبیعی حرف می زنیم منظورمان چیست؟

•اختیارات طبیعی هنگامی وجود دارند که مدیران بتوانند بر حجم یا ریسک جریان های نقدی یک پروژه با اقدام های مختلف خود در طول عمر پروژه در پاسخ به شرایط متغیر بازار اثر بگذارند

•مدیران باهوش در تصمیم گیری برای سرمایه گذاری در پروژه ها، حتماً اختیارات طبیعی موجود در دل پروژه را نیز مد نظر دارند. مدیران باهوش تر اما علاوه بر این، به خلقِ اختیار طبیعی در پروژه ها می پردازند...

چه زمانی اختیار ارزش پیدا می کند؟

• وقتی سرمایه گذاری بازگشت ناپذیر (Irreversible) است

• وقتی در مورد وضعیت آینده عدم اطمینان (Uncertainty) وجود دارد.

اختیارات طبیعی در عمل

- ارزش گذاری منابع نفتی / معادن
- ارزش گذاری وام های بانکی
- ارزش گذاری شرکت های با فناوری بالا
- ارزش سرمایه گذاری در فناوری اطلاعات
- ارزش گذاری حق امتیاز فناوری
- ارزش گذاری انعطاف پذیری خط تولید

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرضیات بخش اول

- این فصل برای انتقال شهود در مورد مفهوم اختیارات طبیعی تدوین شده است و لذا مسایل به صورت ساده شده ارائه شده اند.

مهم ترین فروض ساده کننده در تمامی مثال های آینده:

- اقتصاد ریسک خنثی (Risk Neutral) است.
- اقتصاد دو پریودی است.
- تمامی عدم اطمینان ها در پریود دوم به قطعیت تبدیل می شوند.
- فرایند تصادفی گسسته دو شاخه ای است.

- هر چهار فرض فوق در فصل های آینده رها خواهند شد.

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرضیات بخش اول

- برای ساده شدن محاسبات ارزش فعلی محاسبه شده در مثال ها با فرض پیوسته بودن جریان نقدی تعیین شده است. اگر جریان نقدی گسسته باشد باید تعدیلی در ارزش فعلی داد که ما از آن صرف نظر کرده ایم.

- در صورت احساس نیاز مخاطبان به طور خلاصه روش محاسبه ارزش فعلی جریان نقدی دائمی توضیح داده می شود.

©Hamed Ghoddusi, 2008

مثالی شهودی

- فرض کنید که می توانید در یک معدن سرمایه گذاری کنید. قیمت محصول فعلی ۲۰ واحد است و قیمت در سال آینده با احتمالات مساوی می تواند ۳۰ یا ۱۰ باشد. اگر نرخ بهره (در جهان ریسک خنثی) برابر ۱۰ درصد و هزینه لازم برای سرمایه گذاری ۱۵۰ واحد باشد ارزش سرمایه گذاری را تحلیل کنید.

- روی کرد معمول بر اساس ارزش خالص فعلی

- V=20/0.1=200
- NPV=V-I=200-150=50>0

- نتیجه: ارزش خالص فعلی مثبت است پس سرمایه گذاری کنید. نتیجه نادرست!

©Hamed Ghoddusi, 2008

چرا نتیجه قبلی نادرست است؟

- فرض کنید تصمیم بگیرید که یک سال دیگر صبر کنید. بعد از یک سال وضعیت قیمت معلوم می شود (۱۰ یا ۳۰) و فرض کردیم که قیمت در این سطح باقی خواهد ماند.

- Case 1: P=10 , V=100 , V-I<0 , NPV<0! , No Investment
- Case 2: P=30, V=300, V-I=150>0, Invest

- ارزش فعلی تصمیمات آتی: $NPV = \frac{1}{1+0.1}(0.5*150 + 0.5*0) = 68.2$

- ۶۸٫۲ > ۵۰ : صبر کردن به تر از سرمایه گذاری فوری

©Hamed Ghoddusi, 2008

اختلاف ارزش از کجا می آید؟

- ارزش اختیار برای صبر کردن (سرمایه گذاری الان / سرمایه گذاری یک سال دیگر)

- سوال مهم: ارزش اختیار چه قدر است؟

- سوال: اگر ارزش سرمایه گذاری اولیه ۲۱۰ واحد باشد چه می شود؟

©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال: اختیار توقف و خروج

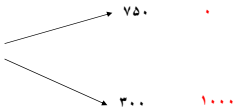
• فرض کنید که می خواهید در ساخت یک هتل سرمایه گذاری کنید. تقاضا برای هتل در آینده با احتمال مساوی ممکن است ۳۰۰ واحد یا ۷۵۰ واحد باشد. هزینه لازم برای ساختن هتل ۵۰۰۰ واحد است. NPV<0

• حال فرض کنید که هتلی که برای ساخت آن سرمایه گذاری می کنید در منطقه ای قرار دارد که تقاضا برای ساختمان اداری در آن وجود دارد و لذا امکان فروش ساختمان هتل به ۴۰۰۰ واحد به خریداران وجود دارد.

• با توضیحات جدید پروژه دارای یک اختیار فروش (Put Option) اضافی هم هست و لذا ممکن است ارزش فعلی آن تغییر کند.

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش اختیار توقف



Put Option Value = (0*.05+1000*0.5)/(1.1)=454

Project Value = Static NPV + Put Option Value= (4772-5000)+454=226

©Hamed Ghoddusi, 2008

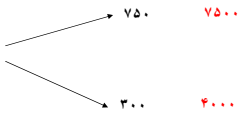
مثال: اختیار سوییچ

• فرض کنید ماشینی در اختیار دارید که می تواند از انرژی گاز و برق استفاده کنید. قیمت گاز مصرفی برای تولید هر واحد محصول ۱۰ واحد و قیمت فروش محصول ۳۰ واحد است. هزینه سرمایه گذاری ۱۷۰ واحد است. مساله این است که قیمت گاز در آینده ممکن است ۵ یا ۱۵ واحد شود. قیمت برق در حال حاضر ۱۵ واحد است ولی در آینده ممکن است ۱۰ یا ۲۰ واحد شود. ارزش این سرمایه گذاری چه قدر است؟

• در این جا ما چیزی شبیه به یک Swaption داریم:

©Hamed Ghoddusi, 2008

روی کرد دیگر (مشابه)



NPV=(7500*0.5+4000*0.5)/1.1-5000=227

©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال: اختیار توسعه

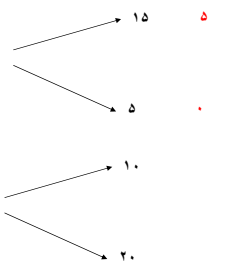
• فرض کنید که می خواهید فناوری را خریداری کنید که باعث افزایش ۱۰ واحدی در درآمد سالیانه شرکت می شود. قیمت این فناوری ۱۰۵ واحد است. اگر نرخ بهره ۱۰% باشد آیا این فناوری را خریداری می کنید؟

• جواب: منفی (NPV<0)

• حال فرض کنید که با داشتن این فناوری می توانید محصول دیگری را هم تولید کنید که البته با قیمت های فعلی توجیه اقتصادی ندارد ولی اگر قیمت در آینده بالا برود تولید آن توجیه پیدا می کند.

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش اختیار سوییچ



C=(50*0.5+0*0.5)/(1.1)=45.5

NPV=?

دقت کنید که رای سادگی ما در این جا یک فرآیند تصادفی پیش رانه برای قیمت هر دو سوخت در نظر گرفتیم و فرض کردیم که قیمت های آن ها با هم هم بستگی منفی دارند.

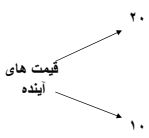
©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال: اختیار توسعه

• هزینه سرمایه گذاری برای تولید محصول جدید ۱۵۰ واحد است.

شکل مقابل سناریوهای ممکن را نشان می دهد.

هر چند خود فناوری ارزش اقتصادی نداشت ولی اختیار توسعه نهفته در آن نهایتا برای آن توجیه اقتصادی ایجاد می کند.



Growth Option Value=(0.5*50+0.5*0)/1.1=22.7

NPV of New Technology = -5 + 22.7 > 0

©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال هایی از اختیارات طبیعی

• سهام شرکت ها

• حق مالکیت معنوی / پتنت

• سرمایه گذاری در تحقیق و توسعه

• ازدواج / حق طلاق / امکان بارداری

• حق بهره برداری از جنگل

• خرید زمین در حومه شهر

• گستره فعالیت های یک شرکت چند ملیتی

©Hamed Ghoddusi, 2008

برخی اختیارات طبیعی معمول

اختیار طبیعی	مثال
تاخیر (Defer)	حق الامتیاز بهره برداری از منابع طبیعی، زمین های مسکونی، زمین کشاورزی
مرحله ای کردن سرمایه گذاری	تحقیق و توسعه، شرکت های نوپا، پروژه های ساختمانی بزرگ
تغییر در ظرفیت تولید	سیستم های تولید انعطاف پذیر، قوانین کار منعطف،
خروجی از سرمایه گذاری	تعطیلی معدن، خطوط هوایی
رشد	کلیه صنایعی که امکان رشد تقاضا در اثر بازخورد عمل کرد قبلی در آن هست. مثال: رستوران
تغییر	ماشین های چندمنظوره، خط تولید مجهز به انرژی دو گانه

©Hamed Ghoddusi, 2008

جمع بندی بخش اول

• قاعده درست برای بودجه بندی سرمایه ای — Static NPV+Option Value > 0

• مقایسه اختیارات طبیعی و مالی

FINANCIAL OPTION	REAL OPTION (F)
Stock or Other Financial Asset	Producing Project (V)
Exercise Price of the Option	Investment Cost for the Project (D)
Stock Dividend Yield	Cash Flows as Proportion of V (δ)
Risk-Free Interest Rate	Risk-Free Interest Rate (r)
Stock Volatility	Project Value Volatility (or proxy) (σ)
Time to Expiration of the Option	Time to Expiration of the Investment Opportunity (T)

©Hamed Ghoddusi, 2008

قیمت گذاری اختیارات در حالت کلی

©Hamed Ghoddusi, 2008

مروری سریع بر مفاهیم اولیه

• اختیار (Option): اجازه انجام دادن عملی بدون وجود اجبار برای آن

• انواع اختیارات: اروپایی، آمریکایی، آسیایی، برخورد-درون، برخورد-بیرون، پاریسی، ...

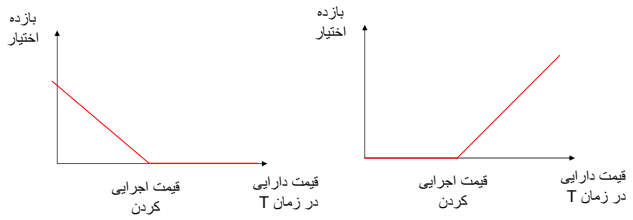
• قیمت گذاری اختیارات:

• روش های فرم بسته (Closed Form): موجود برای آپشن ساده اروپایی و برخی شکل های خاص از آپشن های عجب (Exotic)، در حالت کلی برای آپشن آمریکایی فرم بسته وجود ندارند.

• شبیه سازی
• روش های عددی • حل معادلات دیفرانسیل

©Hamed Ghoddusi, 2008

بازده اختیارات فروش و خرید



رابطه مهم: برابری خرید و فروش (Put-Call Parity)

©Hamed Ghoddusi, 2008

اختیار آمریکایی

- اختیار خرید آمریکایی بدون پرداخت سود سهام قبل از نقطه پایانی اجرایی نمی شود.
- توضیح شهودی
- روی سهام بدون سود: اختیار خرید آمریکایی = اختیار خرید اروپایی

©Hamed Ghoddusi, 2008

تاثیر سود سهام

- سود سهام
- زمان اجرایی کردن اختیار خرید آمریکایی را جلو می آورد
- زمان اجرایی کردن اختیار فروش آمریکایی را عقب می برد

©Hamed Ghoddusi, 2008

معادله دیفرانسیل بنیادی برای آپشن آمریکایی

- منطقه توقف

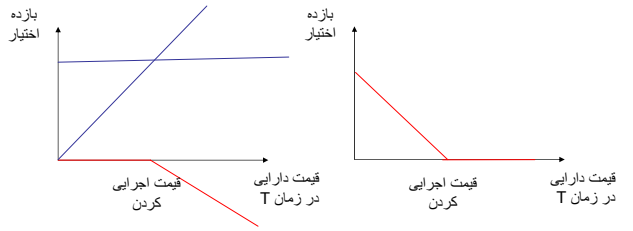
$$\frac{\partial V}{\partial T} = rV - rS\frac{\partial V}{\partial S} - \frac{1}{2}\delta^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

- اگر آپشن دائمی باشد رفتار مانا (Stationary) می شود: $\frac{\partial V}{\partial T} = 0$

- شرایط مرزی متناسب با مساله
- شرط نقطه شروع (شرایط اولیه)
- شرط منطقه بهینگی اجرایی کردن

©Hamed Ghoddusi, 2008

Put-Call Parity



©Hamed Ghoddusi, 2008

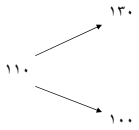
اختیار آمریکایی

- اختیار فروش آمریکایی از این قاعده پیروی نمی کند.
- در واقع ما با یک مساله با مرز ثابت مواجه نیستیم بل که مساله از نوع زمان توقف بهینه است.

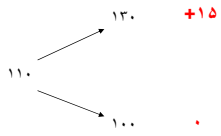
©Hamed Ghoddusi, 2008

دو روی کرد کلی در قیمت گذاری تحت عدم اطمینان

فرض کنید قیمت سهم ام روز ۱۰۰ واحد است و با احتمال های مساوی در دوره بعد به ۱۳۰ یا ۱۰۰ می رسد.

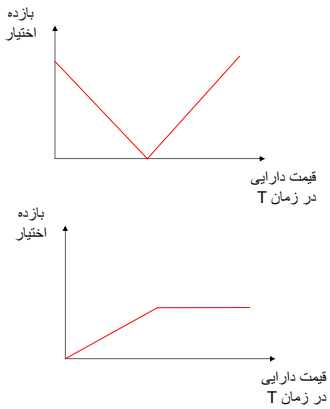


اختیاری برای خرید این سهم به قیمت ۱۱۵ واحد داریم. ارزش این اختیار چه قدر است؟



©Hamed Ghoddusi, 2008

ایجاد بازده های پیچیده تر با استفاده از ترکیب خرید و فروش



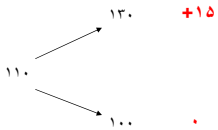
©Hamed Ghoddusi, 2008

روی کرد دوم: احتمال ریسک خنثی

- نادرست بودن استفاده از نرخ بهره اوراق بهادار دیگر برای قیمت گذاری یک ابزار مالی جدید
- یافتن نرخ بهره مناسب برای تنزیل:
  - مدل های پایه ای: ترجیحات عوامل در قبال ریسک
  - مدل های قیمت گذاری دارایی ها (مثلا CAPM یا APT)
- یافتن قیمت بازار ریسک از روی قیمت دارایی های دیگر

©Hamed Ghoddusi, 2008

روی کرد اول: سبد تکرار کننده



ما بازده اختیار را می دانیم. قیمت سهم و نرخ بازده هم مشخص است. لذا می توانیم سبدی از سهام و اوراق قرضه (یا بانک) بسازیم که دقیقا خروجی آپشن را شبیه سازی کنید.

پیامد اصل مهم عدم آربیتراژ این است که دو سبد که بازده یک سان دارند باید قیمت برابر داشته باشند.

فرض کنید S واحد از سهم و B واحد اوراق قرضه با بهره مشخص r=10% انتخاب می کنیم.

$$\begin{cases} 130S + (1.1)B = 15 \\ 100S + (1.1)B = 0 \end{cases}$$

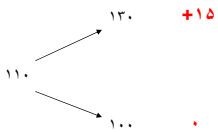
$$S = \frac{15-0}{130-100} = 0.5$$

$$B = (15-65)/1.1 = 45.5$$

C=110*0.5-45.5=9.5

©Hamed Ghoddusi, 2008

روی کرد دوم: احتمال ریسک خنثی



می توانیم دنیای فرضی را تصور کنیم که عامل ها در آن حساسیتی به ریسک ندارند. در چنین دنیای بازده همه دارایی ها مستقل از ریسک شان باید برابر با نرخ بهره بدون ریسک باشد.

برای رسیدن به این دنیا باید تبدیلاتی روی توزیع احتمال جملات اختلال (عوامل ایجاد کننده ریسک) ایجاد کنیم.

ایده ساده: توزیع احتمالی را پیدا کنید که قیمت دارایی محوری (مثلا سهام) را تحت تنزیل بدون بهره برابر با امید ریاضی قیمت های آتی آن کند.

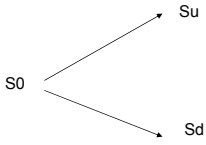
$$110 = \frac{1}{1.1} * E^{Q}(p*130 + (1-p)*100)$$

$$121 = 30p + 100 \Rightarrow p = \frac{21}{30} = 0.7$$

C=(15*0.7+0*0.3)/1.1=9.5

©Hamed Ghoddusi, 2008

معیار مارتینگل در یک مدل دو شاخه ای



$$S_0 = e^{-rt}E_o(S_1) = e^{-rt}(q.S_u + (1-q)S_d) = e^{-rt}(q.S_0.u + (1-q)S_0.d)$$

$$\Rightarrow \quad q = (e^{rt} - d)/(u - d)$$

©Hamed Ghoddusi, 2008

نکات مهم در قیمت گذاری ریسک خنثی

- بی تاثیر بودن نرخ رشد درآمدهای سهم در دنیای فیزیکیP (در مقابل دنیای ریسک خنثی،Q)
- آیا ماجرا به شعبده بازی شبیه است؟ ما قیمت ریسک در بازار را از کجا آوردیم؟

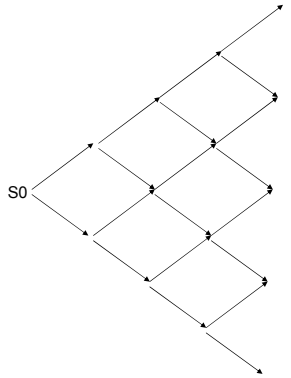
©Hamed Ghoddusi, 2008

معیار مارتینگل (Martingale Measure)

- معیار احتمالی که تحت آن قیمت هر دارایی برابر با مقدار تنزیل شده امید ریاضی جریان های نقدی آتی آن است.
- هشدار: برای یافتن معیار مارتینگل باید قیمت حداقل یک دارایی تحت رفتار تصادفی و با ریسک مشابه در بازار قابل مشاهده باشد. بدون وجود چنین دارایی هیچ راهی برای نوشتن درست معادله قیمت گذاری وجود ندارد.
- مثال از اختیارات حقیقی فاقد ویژگی فوق: کارخانه یخ سازی، اختیار آب و هوا

©Hamed Ghoddusi, 2008

درخت دو جمله ای در حالت کلی



©Hamed Ghoddusi, 2008

حل درخت دو جمله ای

- حل به صورت عقب گرد (Backward)
- محاسبه ارزش در شاخه های پایانی
- محاسبه ارزش هر شاخه بر اساس ارزش سرشاخه ها
- رفتن تا نقطه شروع
- فراموش نکنید: تحت معیار احتمال مارتینگل (ریسک خنثی)

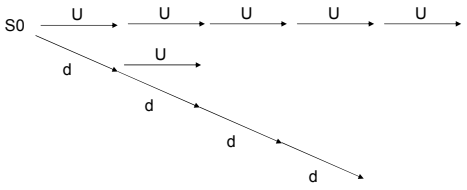
©Hamed Ghoddusi, 2008

روش محاسباتی ساده

۱) مقادیر پارامترها را محاسبه کنید.

۲) یکی از قطرهای ماتریس معادل درخت را ایجاد کنید.

۳) روی هر سطر بایستید و تمام عناصر آن را از روی عنصر اول ایجاد کنید.



©Hamed Ghoddusi, 2008

تقریب زدن حرکت براونی هندسی با درخت دو جمله ای

- قدم اول: تخمین زدن رشد در شاخه ها

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$$

- قدم دوم: تعیین احتمال ریسک خنثی
- سوال: نوسان دارایی را چه گونه تعیین کنیم؟

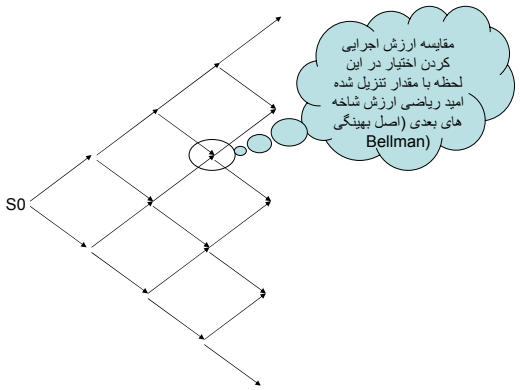
©Hamed Ghoddusi, 2008

حل درخت دو جمله ای برای آپشن آمریکایی

- قابلیت توقف در هر نقطه
- در هر نقطه ارزش عملی کردن آپشن در آن نقطه را با ارزش آپشن های آینده مقایسه کرده و نقطه ای که بالاترین ارزش را دارد انتخاب می کنیم.
- اختیارات حقیقی بسیار شبیه به این مورد است

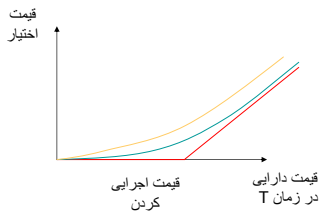
©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال برای اختیار خرید آمریکایی



©Hamed Ghoddusi, 2008

رفتار عمومی قیمت اختیارات



*** رنگ های مختلف نشان گر اختیاراتی با واریانس دارایی پایه متخلف (رنگ قرمز واریانس صفر)**

©Hamed Ghoddusi, 2008

برخی ویژگی های قیمت اختیارات

۱) قیمت اختیار هیچ وقت منفی نیست.

۲) قیمت اختیار آمریکایی حداقل باید E-S باشد.

۳) قیمت اختیار آمریکایی با افزایش زمان اعتبار آن افزایش می یابد.

۴) قیمت اختیار آمریکایی نمی تواند کم تر از اختیار اروپایی مشابه باشد.

©Hamed Ghoddusi, 2008

برخی ویژگی های قیمت اختیارات

۵) یک اختیار خرید (اروپایی/آمریکایی) نمی تواند ارزشی بیش از قیمت فعلی دارایی پایه ای آن داشته باشد.

۶) اگر قیمت دارایی پایه ای صفر باشد قیمت اختیار خرید هم صفر می شود.

۷) قیمت اختیار خرید روی سهام بدون سود حداقل به اندازه قیمت فعلی دارایی پایه ای منهای ارزش فعلی قیمت اجرایی کردن است.

۸) اختیار آمریکایی روی دارایی بدون سود سهام هرگز نباید قبل از زمان انقضاء اجرایی شود.

۹) اختیار آمریکایی دائمی روی دارایی بدون سود درست به اندازه قیمت دارایی ارزش دارد.

©Hamed Ghoddusi, 2008

مفاهیم و ابزارهای ریاضی

©Hamed Ghoddusi, 2008

ریاضیات اختیارات

• قیمت گذاری اختیار فقط در شرایط عدم اطمینان معنی دارد (در شرایط اطمینان تکلیف معلوم است و قیمت اختیار یا صفر است و یا برابر با ارزش نهایی)

• معمولا فرض می شود که متغیرهای حالت سیستم توسط چند فرآیند تصادفی (مستقل یا هم بسته) تحت تاثیر قرار می گیرند.

• پرداختن به جزییات ریاضی مسایل قیمت گذاری اختیار از حوزه این درس خارج است و علاقه مندان می توانند به کتاب های مربوط به Stochastic Calculus یا Continuous Time Finance مراجعه کنند.
منبع اینترنتی معتبر: Shreve ، کتاب معتبر Bjork 1998

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرآیندهای تصادفی: قدم زدن تصادفی (Random Walk)

• فرآیند تصادفی گسسته

• خاصیت مارکوفی

• معادله تفاضلی $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$

• اضافه کردن روند

• فرآیند غیرمانا، غیر بازگشت به میانگین (Non Mean-Reverting)

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرآیندهای تصادفی: حرکت براونی

• حرکت براونی: فرآیند تصادفی پیوسته ولی غیرمشتق پذیر

• معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم (با روند): $dx = \mu dt + \sigma dW$, $W \sim N(0, dt)$

• توزیع احتمالی فرآیند در زمان t $N(x_0 + \mu t, \delta^2 . t)$

• شبیه سازی گسسته

• توضیح شهودی و ریاضی: جزوه حرکت براونی دکتر زنگنه – دکتر جهانی پور

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرآیندهای تصادفی: حرکت براونی (Wiener)

• فرآیند تصادفی پیوسته

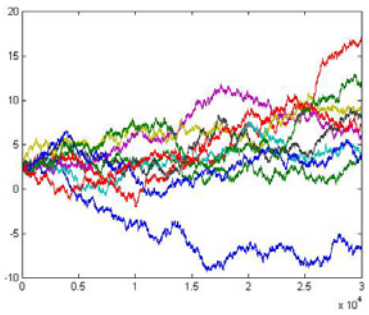
• خاصیت مارکوفی

• نمو مستقل

• نموها با توزیع احتمالی نرمال

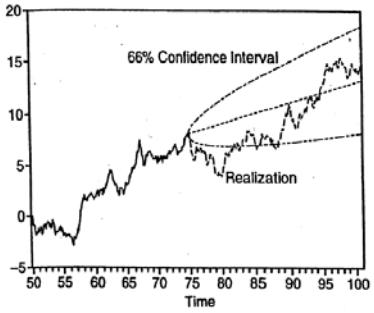
©Hamed Ghoddusi, 2008

ده بار شبیه سازی حرکت براونی



©Hamed Ghoddusi, 2008

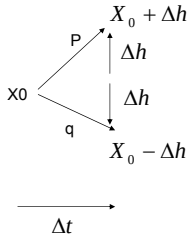
پیش بینی بهینه حرکت براونی



برداشت از کتاب Dixit, Pindyck 1994

©Hamed Ghoddusi, 2008

تقریب زدن حرکت براونی با قدم زدن تصادفی



- میانگین و واریانس در یک قدم

$$E(\Delta X) = (p-q)\Delta h$$
$$V(\Delta X) = 4pq(\Delta h)^2$$

- در طول فاصله طولانی تر: توزیع دوجمله ای

$$E(\Delta X) = (p-q)\Delta h.\frac{t}{\Delta t}$$
$$V(\Delta X) = 4pq(\Delta h)^2.\frac{t}{\Delta t}$$

©Hamed Ghoddusi, 2008

تقریب زدن حرکت براونی با قدم زدن تصادفی

- برای رسیدن به حرکت براونی در حد

$$\Delta h = \sigma\sqrt{t}$$
$$p = \frac{1}{2}[1+\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{t}]$$
$$q = \frac{1}{2}[1-\frac{\alpha}{\sigma}\sqrt{t}]$$

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرآیندهای تصادفی: حرکت براونی هندسی

- مشکل فرآیند براونی: احتمال منفی شدن در نتیجه نامناسب بودن برای مدل کردن متغیرهای اقتصادی مثل قیمت (سهام، کالا، دست مزد، ...) و نیز نرخ بهره اسمی

- فرآیند براونی هندسی:

$$dx = x\mu dt + x\sigma dW$$
$$W \sim N(0, dt)$$

- موقعیت فرآیند در زمان t

$$x_t = x_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sigma W_t}$$

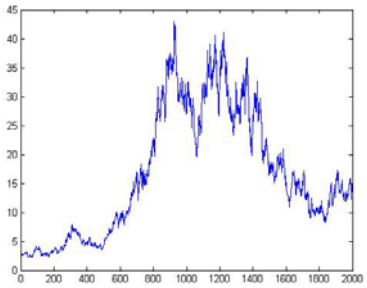
- امید ریاضی فرآیند در زمان t

$$E(x_t) = x_0.e^{\mu t}$$

- توزیع لوگ نرمال

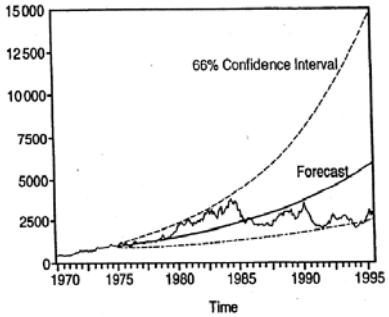
©Hamed Ghoddusi, 2008

شبیه سازی حرکت براونی هندسی



©Hamed Ghoddusi, 2008

پیش بینی بهینه حرکت براونی هندسی



برداشت از کتاب Dixit, Pindyck 1994

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرآیندهای تصادفی: فرآیند بازگشت به میانگین

- برای برخی متغیرهای اقتصادی (مثلا قیمت محصولات معدنی) معقول تر است که از فرآیند تصادفی استفاده شود که حول یک میانگین نوسان می کند و شوک های بیرونی به آن در زمان کوتاهی جذب می شود.

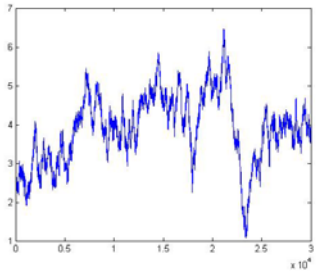
فرآیند اورنشتاین- اولنبک (Ornstein-Uhlenbeck) مدل رایج برای این منظور است.

$$dx = \alpha(\mu - x)dt + \sigma dW$$

$$E(x_t) = \mu + (x_0 - \mu)e^{-\alpha t}$$

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرآیند بازگشت به میانگین



©Hamed Ghoddusi, 2008

حساب دیفرانسیل تصادفی: لم ایتو (Ito's Lemma)

- فرض کنید حرکت یک متغیر اقتصادی به صورت حرکت بروانی (هندسی) باشد (مثلا قیمت سهام یا نفت). ضمنا فرض کنید موجودیت دیگری به صورت تابعی روی این متغیر تعریف شده است (مثلا یک آپشن). مطلوب است معادله دیفرانسیل حاکم بر این متغیر

- ایده پایه ای: بسط تیلور با ملاحظه رفتار خاص توان دوم فرآیند تصادفی

©Hamed Ghoddusi, 2008

حساب دیفرانسیل تصادفی: لم ایتو

$$dx = \mu dt + \sigma dW$$

$$(dx)^2 = \sigma^2 dt$$

$$df(x) = [f'(x)\mu + \frac{1}{2} f''(x)\delta^2]dt + f'(x)\delta dW$$

- لم ایتو و نامساوی جنسن، ایده شهودی مهم برای اختیارات طبیعی

©Hamed Ghoddusi, 2008

لم ایتو: مثال

$$dx = \mu dt + \sigma dW$$

$$f(x) = e^x$$

$$df(x) = ?$$

- جمله تصحیح (Correction) در فرآیند براونی هندسی

©Hamed Ghoddusi, 2008

لم ایتو: مثال

$$dx = x\mu dt + x\sigma dW$$

$$f(x) = \log x$$

$$df(x) = ?$$

- به رابطه بین توزیع نرمال و توزیع لوگ نرمال فکر کنید.

©Hamed Ghoddusi, 2008

قیمت گذاری اختیارات و فرمول بلک شولز

- فرضیات:
  - نبود هزینه خرید و فروش
  - نامحدود بودن فروش استقراضی
  - نرخ بهره کوتاه (Short Rate) ثابت
  - توزیع بازده نرمال
  - نوسانات ثابت
  - فقدان سود سهام

©Hamed Ghoddusi, 2008

قیمت گذاری اختیارات و فرمول بلک شولز

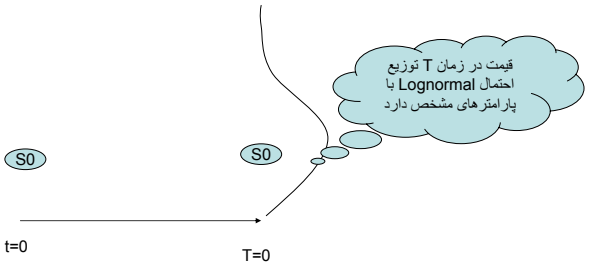
• ما توزیع احتمال قیمت (تحت معیار احتمال مارتینگل) را می دانیم. چرا که بازده در این دنیا با نرخ بهره بدون ریسک r رشد می کند و از لم ایتو می توانیم معادله دیفرانسیل فرآیند قیمت را محاسبه کنیم. به عبارت دیگر لگاریتم قیمت در لحظه T توزیع نرمال با میانگین و واریانس معلوم دارد.

• در اختیار خرید ما علاقه مند به تحقق هایی از متغیر تصادفی قیمت آینده هستیم که بالاتر از قیمت اجرایی کردن (K) هستند به عبارت دیگر $(S-K)1_{S>K}$

©Hamed Ghoddusi, 2008

قیمت گذاری اختیارات و فرمول بلک شولز

• مساله: دارایی داریم که قیمت آن S0 است. در زمان T اختیار اروپایی خرید با قیمت اجرایی کردن K داریم. قیمت این اختیار چه قدر است؟



©Hamed Ghoddusi, 2008

فرمول بلک شولز و سود سهام (Dividends)

• در فرمول اصلی دارایی پایه سود لحظه ای ندارد.

• در صورت وجود چنین سودی باید نرخ رشد دارایی را تعدیل کرد.

• سوال شهودی: اگر دو اختیار معامله روی دو سهم با نوسانات و قیمت اولیه مشابه ولی اولی بدون سود سهام و دومی با سود سهام داشته باشیم کدام اختیار با ارزش تر است؟

• سود سهام در Commodities، بهره آسایش (Convenience Yield)

©Hamed Ghoddusi, 2008

فرمول نهایی

$$c(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

where:

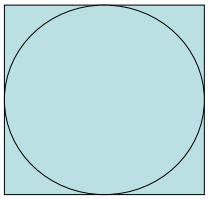
$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$N(\cdot)$ distribution function for a standard Normal (i.e. $N(0,1)$)

©Hamed Ghoddusi, 2008

شبیه سازی مونته کارلو در قیمت گذاری آپشن



• ایده کلی شبیه سازی مونته کارو: محاسبه عدد پی

• سری دو بعدی از اعداد تصادفی یک نواخت تولید کنید. هر زوج (x,y) را در معادله دایره واحد امتحان کنید. اگر داخل دایره بود یک امتیاز بدهید. کل امتیازات را بر تعداد شبیه سازی تقسیم کنید. مساحت دایره به دست می آید و عدد پی از طریق آن قابل محاسبه است.

©Hamed Ghoddusi, 2008

تاثیر تغییر پارامترها بر ارزش اختیارات

	اختیارات			
متغیر	C_e	P_e	C_a	P_a
S_0	+	−	+	−
X	−	+	−	+
T	?	?	+	+
σ	+	+	+	+
r	+	−	+	−
D	−	+	−	+

©Hamed Ghoddusi, 2008

شبیه سازی مونته کارلو در قیمت گذاری آپشن

• تعداد زیادی Realization از فرآیند تصادفی پایه ای اختیار تولید کنید و بازده اختیار را بر اساس هر Realization محاسبه کنید. میانگین بازده های محاسبه شده را با نرخ بهره بدون ریسک تنزیل کنید. قیمت آپشن به دست می آید.

• فراموش نکنید که نرخ رشد فرآیند تصادفی باید برابر با نرخ بهره بدون ریسک باشد (شبیه سازی در جهان فیزیکی نیست بل که در جهان ریسک خنثی است)

• طبق معمول روش تنها زمانی درست است که فرآیند پایه ای در بازار مبادله شده و قیمت اولیه آن بر اساس تعادل بازار معلوم باشد.

©Hamed Ghoddusi, 2008

شبیه سازی مونته کارلو در قیمت گذاری آپشن

• مونته کارلو خام (Crude): مساله سرعت هم گرایی

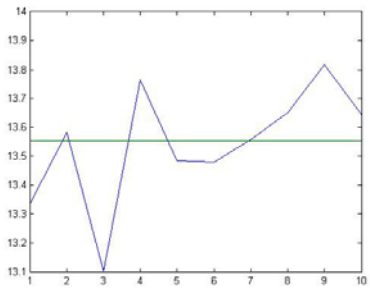
• روش های کاهش واریانس:

• مونته کارلو زوج متناقض (Antithetic)

• مونته کارلو با کنترل تغییرات (Control Variates)

©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال: قیمت اختیار اروپایی با پارامتر های



آبی: شبیه سازی
سبز: بلک شولز

©Hamed Ghoddusi, 2008

بهینه سازی پویا (Dynamic Optimization)

این بخش صرفا توصیفی شهودی از مفاهیم پایه بهینه سازی پویا که در تئوری اختیارات (طبیعی) مورد استفاده قرار می گیرند را ارائه می کند و بسیاری از جزییات و دقت نظرهای ریاضی لازم (مثلا شرایط وجود و یکتایی جواب) از آن حذف شده است. علاقه مندان می توانند به کتاب های تخصصی مثل

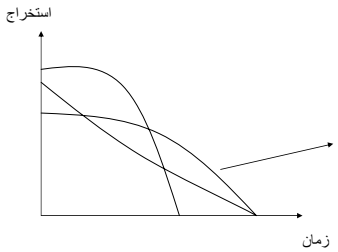
• Leonard and Van Long 1998
• Stokey and Lucas, 1989
• اهرابی، شاکری

رجوع کنند.

©Hamed Ghoddusi, 2008

بهینه سازی پویا (Dynamic Optimization)

• مثال: استخراج بهینه منابع طبیعی



Value Functional (Not Function!)

©Hamed Ghoddusi, 2008

بهینه سازی پویا (Dynamic Optimization)

• متغیر حالت (State) : مثال تقاضا، ظرفیت، حجم سرمایه

• متغیر کنترل (Control) : مثال تولید، سرمایه گذاری، مصرف، استخراج

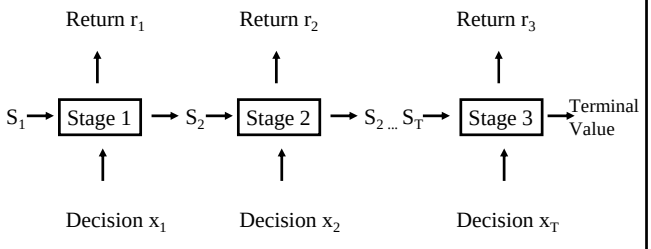
• تابع منافع

• سیاست (بهینه)

• متغیر کنترل باینری (مهم برای اختیارات حقیقی): ورود/عدم ورود، خروج/ماندن توسعه ظرفیت/حفظ ظرفیت، تغییرمحصول/حفظ محصول قبلی

©Hamed Ghoddusi, 2008

نمایی شهودی از بهینه سازی پویایی چند دوره ای



• مساله هتلینگ در فضای گسسته

©Hamed Ghoddusi, 2008

اصل بهینگی بلمن (Bellman)

• سیاست بهینه این خاصیت را دارد که اقدامات از نقطه ای در فضای حالت به بعد باید خود یک سیاست بهینه را شکل بدهند.

• رابطه اساسی بلمن: $F_t(x_t) = \max_{u_t} \{\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F_{t+1}(x_{t+1})]\}$

• اگر افق بی نهایت باشد: $F(x_t) = \max_{u_t} \{\pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F(x_{t+1})]\}$

©Hamed Ghoddusi, 2008

توقف بهینه (Optimal Stopping)

• یک نوع خاص از مسایل بهینه سازی پویا که در آن متغیر کنترل در هر لحظه وضعیت باینری دارد بیش ترین کاربرد را در تئوری اختیارات طبیعی دارد.

• مساله اختیارات طبیعی: در هر لحظه از زمان عملی کردن اختیار یا ادامه دادن و رفتن به مرحله بعدی

$$F(x) = \max\{\Omega(x), \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1+\rho} E_t[F(x') \mid x]\}$$

ارزش اجرایی کردن فوری

ارزش ادامه دادن

©Hamed Ghoddusi, 2008

اصل بهینگی دورفمن (Dorfman)

• در مسیر بهینه متغیر کنترل باید طوری انتخاب شود که منافع آنی حاشیه ای با تغییرات حاشیه ای انباشت سرمایه در تعادل باشند.

• مثال برای اختیارات حقیقی: توقف بیش تر (از دست دادن منافع تولید) در قبال افزودن بر ارزش سرمایه گذاری آتی

©Hamed Ghoddusi, 2008

سرمایه گذاری و پس ماند

©Hamed Ghoddusi, 2008

مشاهدات دنیای واقع

• بنگاه ها به محض سودآور شدن تولید یک محصول وارد صنعت نمی شود. از طرف دیگر اگر تولید یک محصول زیان ده شود بنگاه ها به سرعت از صنعت خارج نمی شود.

• اختیارات طبیعی توضیح عقلانی برای این رفتار ارائه می کند.

• سه ویژگی سرمایه گذاری در دنیای واقع

• وجود هزینه های ریخته (Sunk Cost)
• وجود عدم اطمینان (Uncertainty) در مورد حوادث آتی
• پایدار بودن فرصت سرمایه گذاری برای یک دوره زمان

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش فعلی جریان درآمدها

• فرض کنید فرآیند تصادفی پیش رانه درآمد یک پروژه (شرکت) حرکت بروانی (هندسی) دارد. اگر درآمد شرکت به صورت f(x) باشد ارزش فعلی درآمدهای شرکت چه قدر است؟

• مساله تعیین ارزش بر اساس معادله $F = E\int_0^\infty \{ f(x)e^{-\rho t}dt \mid x = x_0 \}$

©Hamed Ghoddusi, 2008

روی کرد معادل: معادله دیفرانسیل ارزش برای حرکت براوانی

$$F(x) = f(x)dt + e^{\rho dt}E([F(x+dx)]$$

لم ایتو → $E[dF] = \mu F'dt + \frac{1}{2}\sigma^2 F''dt$

جای گذاری و ساده سازی → $\mu F'dt + \frac{1}{2}\sigma^2 F''dt - \rho F + f(x) = 0$

$\mu F'dt + \frac{1}{2}\sigma^2 F''dt - \rho F = 0$ → جواب عمومی → $Ae^{-\alpha X} + Be^{\beta X}$

جواب اختصاصی؟

©Hamed Ghoddusi, 2008

معادله دیفرانسیل ارزش برای حرکت براوانی هندسی

$$F(x) = f(x)dt + e^{\rho dt}E([F(x+dx)]$$

لم ایتو → $E[dF] = \mu XF'dt + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 F''dt$

جای گذاری و ساده سازی → $\mu XF'dt + \frac{1}{2}X^2\sigma^2 F''dt - \rho F + f(x) = 0$

$\mu F'dt + \frac{1}{2}\sigma^2 F''dt - \rho F = 0$ → جواب عمومی → $CX^{-\gamma} + CX^{-\delta}$

جواب اختصاصی؟

©Hamed Ghoddusi, 2008

اختیارات طبیعی و برنامه ریزی پویا

• در حالت کلی تحلیل ارزش اختیار طبیعی معادل حل مساله بهینه سازی پویای زیر است:

$$F(V(t)) = \max\{V(t) - I, e^{-\rho dt}E[F(V(t+dt))]\}$$

• حل تحلیلی این مساله ساده نیست. به جای آن از ایده یافتن نقطه بهینه توقف استفاده می کنیم و فضای حالت را به دو منطقه افراز می کنیم.

- منطقه ای که درنگ بهینه است
- منطقه ای که سرمایه گذاری بهینه است

©Hamed Ghoddusi, 2008

شروط لازم برای بهینگی جواب

• در مرز دو ناحیه دو شرط برقرار است:

• برابری ارزش ها (Value Matching)

Value matching : $F(V^*) = \Omega(V^*)$

• عبور هم وار (Smooth Pasting)

Smooth Pasting : $F_V(V^*) = \Omega_V(V^*)$

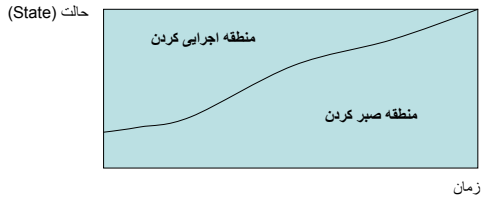
©Hamed Ghoddusi, 2008

تصمیم برای اجرایی کردن

• ارزش فعلی کل ارزش های آتی = قیمت بازار در هر لحظه

در مقایسه با

• ارزش ناشی از اجرایی کردن اختیار در این لحظه



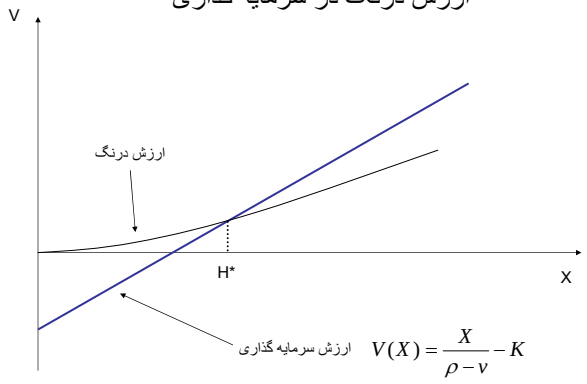
©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال: سرمایه گذاری بازگشت ناپذیر (Mcdonald, Siegel, 1986)

- فرض کنید پروژه سرمایه گذاری دارید که در هر لحظه از زمان می توانید آن را با سرمایه گذاری Kعملی کنید.
- درآمد پروژه X از فرآیند بروانی هندسی پیروی می کند و مقدار آن در هر لحظه قابل مشاهده است.
- نقطه بهینه برای سرمایه گذاری کجا است؟

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش درنگ در سرمایه گذاری



$$V(X) = \frac{X}{\rho - v} - K$$

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش پروژه قبل از رسیدن به X*

- درنگ سود لحظه ای تولید نمی کند ولی با افزایش متغیر حالت ارزش سرمایه ای پروژه بالا می رود.

$$\rho F\, dt = \mathcal{E}(dF)\,.$$

- E(dF) را با استفاده از لم ایتو بسط می دهیم و نهایتا به معادله دیفرانسیل زیر می رسیم.

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 V^2 F''(V) + \alpha V F'(V) - \rho F = 0\,.$$

- جواب کلی این معادله $G = DX^{\beta}$

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش پروژه قبل از رسیدن به X*

- یافتن ضرایب در فرم تابعی نیازمند دانستن شرایط مرزی است.
- وقتی X به سمت منفی بی نهایت می رود قاعدتا ارزش درنگ صفر است.
- شرط برابری ارزش ها $DX^{\beta} = \frac{X}{\rho - v} - K$
- شرط تقاطع هم وار $\beta DX^{*\beta-1} = \frac{1}{\rho - v}$
- نقطه بهینه $X^{*} = \frac{\beta}{\beta - 1}.\rho.K$

©Hamed Ghoddusi, 2008

شهود ناشی از اختیارات طبیعی

- نقطه بهینه به دست آمده را با نقطه ای که از قواعد اقتصاد مهندسی به دست می آید مقایسه کنید. چه تفاوتی مشاهده می کنید؟ این تفاوت از کجا می آید؟
- کاربرد: چرا منحنی های آتی محصولات معدنی (خصوصا نفت) عقب گرد (Backward) است؟ Litzenberger and Rabinowitz, 1995

©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال: خروج از سرمایه گذاری

- فرض کنید پروژه ای دارید که درآمدی با فرآیند حرکت براونی تولید می کند. در چه نقطه ای از درآمد خروج از این سرمایه گذاری بهینه است؟ (فرض کنید ارزش اسقاط سرمایه گذاری صفر است)
- معادله دیفرانسیل منطقه ادامه فعالیت $\mu F' dt + \frac{1}{2}\sigma^2 F'' dt - \rho F + x = 0$
- جواب عمومی: $Ae^{-\alpha X} + Be^{\beta X}$
- جواب اختصاصی: $\alpha + \beta X$ $\alpha = \frac{\mu}{\rho^2}, \beta = \frac{1}{\rho}$

©Hamed Ghoddusi, 2008

مثال: خروج از سرمایه گذاری

• برای یافتن جواب دو شرط برابری ارزش ها و عبور هم وار را اعمال می کنیم.

• ارزش اسقاط و هزینه توقف صفر است. پس داریم:

$$Ae^{-\alpha X} + Be^{\beta X} + \frac{\mu}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} X = 0$$

$$-\alpha A X e^{-\alpha X} + \beta B e^{\beta X} + \frac{1}{\rho} = 0$$

$$X^* = \frac{1}{\beta} - \frac{\mu}{\rho} < 0$$

• نتیجه خلاف شهود: توقف در نقطه ای که سود منفی است و نه وقتی سود صفر است (پس ماند)

©Hamed Ghoddusi, 2008

موانع (Barriers)

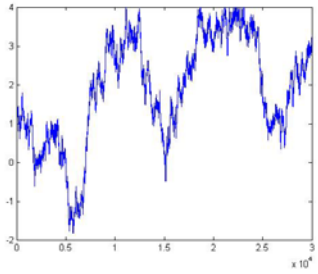
• موانع جذب کننده (Absorbing) : توقف خط، افزایش ظرفیت

• موانع منعکس کننده (Reflecting) : رقابت، مقررات

• موانع بازنشان (Resetting): تعویض ماشین

©Hamed Ghoddusi, 2008

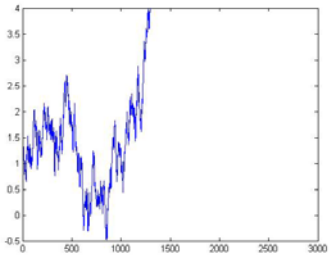
مانع منعکس کننده



• معادله دیفرانسیل پایه: ارزش در دو طرف مانع

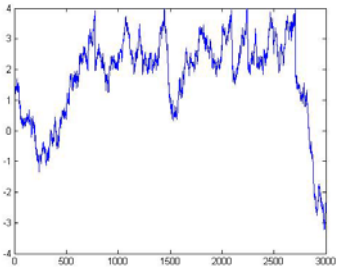
©Hamed Ghoddusi, 2008

مانع جذب کننده



©Hamed Ghoddusi, 2008

مانع ریست (Resetting Barrier)



©Hamed Ghoddusi, 2008

اجرایی اختیارات طبیعی معادل تعبیه مانع به صورت بهینه

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش گذاری منابع معدنی (Brennan, Schwartz, 1985)

• در شرایط وجود هزینه بستن و گشودن معدن رفتار بهینه سرمایه گذاران چه گونه است؟

• تاثیر این رفتار بر دینامیک قیمت محصولات معدنی چیست؟

©Hamed Ghoddusi, 2008

ارزش زمین شهری، Titman 1985

• چرا با وجود زمین های خالی در برخی شهرها قیمت زمین بسیار گران است؟

• چرا قیمت زمین در مناطقی که ساختمان سازی در آن جذابیت چندانی ندارد هم گران است؟

©Hamed Ghoddusi, 2008

اختیارات طبیعی و مدیریت استراتژیک

• استراتژی به عنوان پورت فولیویی از اختیارات طبیعی

• قیمت گذاری شرکت های با فناوری بالا

©Hamed Ghoddusi, 2008

اختیارات طبیعی و فناوری اطلاعات

• طراحی نرم افزار به عنوان اختیاری برای توسعه سریع تر نرم افزارهای آتی

•

©Hamed Ghoddusi, 2008

مشکلات چارچوب اختیارات طبیعی در عمل

• یافتن دارایی پایه مبادله شده (Traded Underlying) یا دارایی دیگر پوشش دهنده

• تخمین واریانس آتی دارایی پایه

©Hamed Ghoddusi, 2008

ادامه دارد ...

©Hamed Ghoddusi, 2008